



RR-0878

Third Year B. Sc. Examination

March / April – 2010

Mathematics : Paper - VII

(Abstract Algebra)

(Old Course)

Time : Hours]

[Total Marks :

સૂચના :

(૧)

નીચે દર્શાવેલ નિશાનીવાળી વિગતો ઉત્તરવહી પર અવશ્ય લખવી.  
Fillup strictly the details of signs on your answer book.

Name of the Examination :  
T. Y. B. Sc.

Name of the Subject :  
Mathematics - 7 (Old)

Subject Code No. : 0 8 7 8 Section No. (1, 2,.....): Nil

Seat No. :

Student's Signature

(૨) બધા જ પ્રશ્નોના ફરજિયાત છે.

(૩) જમણી બાજુના અંક ગુણ સૂચવે છે.

(૪) પ્રચલિત સંકેતોને અનુસરો.

૧ માગ્યા મુજબ જવાબ આપો :

૧૫

(૧) સમૂહ  $G$  માં દર્શાવો કે  $(ab)^{-1} = b^{-1}a^{-1}$ ,  $\forall a, b \in G$ .

(૨) જો  $G$  એ સાંત સમૂહ તથા  $a \in G$  હોય, તો સાબિત કરો કે  $a^{O(G)} = e$ .

(૩) જો  $G$  એ શૂન્યેત્તર વાસ્તવિક સંખ્યાઓનો ગણ, જે ગુણાકારના નિયમ હેઠળ સમૂહ થતો હોય અને  $f: G \rightarrow G$  હોય કે જેથી  $f(x) = x^3$  થાય તો સાબિત કરો કે  $f$  એ સમરૂપ વિધેય છે.

(૪) જો  $\phi$  એ મંડળ  $R$  થી મંડળ  $\bar{R}$  પરની સમરૂપતા હોય, તો સાબિત કરો કે

(૧)  $\phi(0) = \bar{0}$

(૨)  $\phi(-a) = -\phi(a)$ ,  $\forall G \in R$ .

(પ) ધારો કે  $R$  એ યુક્લિડીય મંડળ છે. જો  $a, b, c \in R$  માટે  $a|bc$  તથા  $(a, b) = 1$  હોય તો સાબિત કરો કે  $a|c$ .

૨ (અ) જો  $a$  તથા  $b$  ધન પૂર્ણાંક સંખ્યાઓ હોય, તો સાબિત કરો કે  $[a, b](a, b) = a \cdot b$ . ૬

(બ) જો  $a|x, b|x$  અને  $(a, b) = 1$  હોય તો સાબિત કરો કે  $ab|x$ . ૬

(ક) સાબિત કરો કે  $G = \{1, 2, 3, 4\}$  એ  $X_5, 5$  ને સાપેક્ષ ગુણાકાર ક્રિયા હેઠળ સમક્રમી સમૂહ છે. ૬

અથવા

૨ (અ) સાબિત કરો કે ૬

(૧) જો  $a \equiv b \pmod{n}$  અને  $c \equiv d \pmod{n}$  હોય તો  $ac \equiv bd \pmod{n}$ .

(૨) જો  $ab \equiv ac \pmod{n}$  અને  $(a, n) = 1$  હોય તો  $b \equiv c \pmod{n}$ .

(બ) પૂર્ણાંક સંખ્યાઓ  $m$  તથા  $n$  એવી શોધો કે જેથી  $(227, 143) = 227m + 143n$ . ૬

(ક) જો સમૂહ  $G$  માટે  $(a \cdot b)^2 = a^2 \cdot b^2, \forall a, b \in G$  હોય તો સાબિત કરો કે  $G$  સમક્રમી છે. ૬

૩ (અ) જો  $H$  એ સમૂહ  $G$  નો અરિક્ત સાંત ઉપગણ કે  $G$ ની ક્રિયા ગુણાકાર હેઠળ સંવૃત્ત હોય, તો સાબિત કરો કે  $H$  એ  $G$ નો ઉપસમૂહ છે. ૬

(બ) સાબિત કરો કે સમૂહના કોઈ પણ બે ઉપસમૂહોનો છેદગણ ઉપસમૂહ છે. ૬

(ક) સમૂહમાં સમશેષતાના સંબંધની વ્યાખ્યા આપો. સાબિત કરો કે સમૂહનો આ સમશેષતાનો સંબંધ સામ્ય સંબંધ છે. ૬

અથવા

- ૩ (અ) જો  $G$  એ સાંત સમૂહ તથા  $a \in G$  હોય તો સાબિત કરો કે  $O(a) \mid O(G)$ . ૬
- (બ) સાબિત કરો કે અવિભાજ્ય કક્ષાવાળું સમૂહ ચક્રીય હોય છે. ૬
- (ક) જો  $H$  એ 2 આંકનો, સમૂહ  $G$  નો ઉપસમૂહ હોય તો સાબિત કરો કે  $H$  એ  $G$  નો નિયત ઉપસમૂહ છે. ૬

- ૪ (અ) ધારો કે  $\phi: G \rightarrow \bar{G}$  એ સમૂહ  $G$  થી સમૂહ  $\bar{G}$  પરની સમરૂપતા છે. સાબિત કરો કે સમરૂપતા  $\phi$  નો ગર્ભ,  $\text{Ker } \phi$  એ  $G$  નો નિયત ઉપસમૂહ છે. ૬
- (બ) નીચે આપેલા વિધેયો સમૂહની સમરૂપતા છે એમ સાબિત કરો અને તેમના ગર્ભ પણ શોધો :

(૧)  $\phi: G \rightarrow G; \phi(x) = x^2, \forall x \in G$ , જ્યાં  $G$  એ ગુણાકાર હેઠળ તમામ ધન વાસ્તાવિક સંખ્યાઓનો સમૂહ છે.

(૨)  $\phi: G \rightarrow G; \phi(x) = x^3, \forall x \in G$ , જ્યાં  $G$  એ 12 કક્ષાવાળો  $a$  થી સર્જિત ચક્રીય સમૂહ છે.

- (ક) જો  $a = (1\ 3\ 5)(1\ 2)$  અને  $b = (1\ 5\ 7\ 9)$  હોય તો  $a^{-1}ba$  શોધો. ૬

અથવા

- ૪ (અ) સાબિત કરો કે સમૂહ  $G$  ના બધા અંતઃઆત્મરૂપતાનો ગણ  $I(G)$  એ  $G$  ના બધા આત્મરૂપતાના સમૂહ  $A(G)$  નો ઉપસમૂહ છે. ૬
- (બ) સાબિત કરો કે  $G$  એ સમક્રમી સમૂહ હોય તો અને તો જ વિધેય  $\phi: G \rightarrow G$  જ્યાં  $a\phi = a^{-1}, \forall a \in G$  એ આત્મરૂપતા છે. ૬
- (ક) ધારો કે  $G = \{e, a, b, a \cdot b\}$  એ સમૂહ છે જ્યાં  $a^2 = b^2 = (a \cdot b)^2 = e$  અને  $ab = ba$  છે.  $G$  ની તમામ આત્મરૂપતાના ગણ  $A(G)$  ને શોધો. ૬

- ૫ (અ) પૂર્ણ પ્રદેશની વ્યાખ્યા આપો. સાબિત કરો કે દરેક ક્ષેત્રએ પૂર્ણ પ્રદેશ છે. ૬
- (બ) સાબિત કરો કે જો સમક્રમી મંડળ  $D$  પૂર્ણ પ્રદેશ હોય તો અને તો જ ૬
- $$ab = ac \Rightarrow b = c, \forall a, b, c \in D, \text{ જ્યાં } a \neq 0.$$
- (ક) જો  $U$  તથા  $V$  મંડળ  $R$ ના ઇષ્ટમંડળો હોય તો સાબિત કરો કે  $U+V$  ૬
- એ  $R$ નું ઇષ્ટમંડળ છે.

#### અથવા

- ૫ (અ) સાબિત કરો કે મંડળ સમરૂપતા  $\phi: R \rightarrow \bar{R}$  એ એકરૂપતા હોય તો ૬
- અને તો જ  $I(\phi) = (0)$ .
- (બ) ધારો કે  $R$  એકમ ઘટકવાળું સમક્રમી મંડળ છે, જેમાં ફક્ત  $(0)$  તથા ૬
- $(R)$  પોતે એમ બે જ ઇષ્ટમંડળો હોય તો સાબિત કરો કે  $R$  એ ક્ષેત્ર છે.
- (ક) બુલિય મંડળ  $R$ માં સાબિત કરો કે  $a+a=0, \forall a \in R$  અને આ ૬
- પરથી સાબિત કરો કે બુલિય મંડળ સમક્રમી છે.

- ૬ (અ) ધારો કે  $R$  એ યુક્લિડીય મંડળ છે. જો  $A = (a_0)$  એ  $R$ નું મહત્તમ ૬
- ઇષ્ટમંડળ હોય, તો સાબિત કરો કે  $a_0$  એ  $R$ નો અવિભાજ્ય ઘટક છે.
- (બ) ધારો કે  $R$  એ યુક્લિડીય મંડળ છે. જો  $b \neq 0$  એ  $R$ નો એકમ ના ૬
- હોય તો સાબિત કરો કે  $d(a) < d(ab), a \in R$ .
- (ક) સાબિત કરો કે દરેક ક્ષેત્ર એ યુક્લિડીય મંડળ છે. ૬

#### અથવા

- ૬ (અ) ધારો કે  $R$  એ યુક્લિડીય મંડળ છે. સાબિત કરો કે  $R$ નો પ્રત્યેક શૂન્યેત્તર ૬
- ઘટક કાં તો એકમ છે અથવા તો તેને સાંત અવિભાજ્ય ઘટકોના ગુણાકાર
- તરીકે દર્શાવી શકાય છે.
- (બ) સમક્રમી મંડળમાં વિભાજ્ય સંબંધને વ્યાખ્યાયિત કરો ધારો કે  $R$  એ એકમ ૬
- ઘટકવાળો પૂર્ણ પ્રદેશ છે. જો  $a, b \in R$  માટે  $a|b$  અને  $b|a$  હોય તો
- સાબિત કરો કે  $a$  તથા  $b$  સહયોગી છે.
- (ક) સાબિત કરો કે એકમ ઘટકવાળા સમક્રમી મંડળ પરનો સંબંધ  $a$  એ  $b$ નો ૬
- સહયોગી છે એ સામ્ય સંબંધ છે.

## ENGLISH VERSION

- Instructions :** (1) As per the Instruction No. 1 of Page no. 1.  
(2) All the questions are compulsory.  
(3) Figures to the right indicate marks.  
(4) Follow usual notations.

**1** Answer as directed : **15**

- (1) In a group  $G$ , show that  $(ab)^{-1} = b^{-1}a^{-1}$ ,  $\forall a, b \in G$ .
- (2) If  $G$  is a finite group and  $a \in G$  then prove that  $a^{O(G)} = e$ .
- (3) Prove that  $f: G \rightarrow G$  defined by  $f(x) = x^3$  where  $G$  is a group of all non zero real numbers under multiplication is a homomorphism.
- (4) Let  $\phi$  be a homomorphism of a ring  $R$  into a ring  $\bar{R}$  then prove that
- (1)  $\phi(0) = \bar{0}$
- (2)  $\phi(-a) = -\phi(a)$ ,  $\forall a \in R$ .
- (5) Let  $R$  be a Euclidean ring. If for  $a, b, c \in R$ ,  $a | bc$  and  $(a, b) = 1$  then prove that  $a | c$ .

- 2** (a) If  $a$  and  $b$  are positive integers, then prove that **6**  
 $[a, b](a, b) = ab$ .
- (b) If  $a | x$ ,  $b | x$  and  $(a, b) = 1$  then prove that  $ab | x$ . **6**
- (c) Prove that  $G = \{1, 2, 3, 4\}$  is an abelian group under **6**  
the operation of  $X_5$ , multiplication modulo 5.

OR

- 2 (a) Prove that 6
- (1) If  $a \equiv b \pmod{n}$  and  $c \equiv d \pmod{n}$  then  
 $ac \equiv bd \pmod{n}$ .
- (2) If  $ab \equiv ac \pmod{n}$  and  $(a, n) = 1$  then  
 $b \equiv c \pmod{n}$ .
- (b) Find the integers  $m$  and  $n$  such that 6  
 $(227, 143) = 227m + 143n$ .
- (c) IF for a group  $G$   $(ab)^2 = a^2 b^2, \forall a, b \in G$  then 6  
 prove that  $G$  is abelian.
- 3 (a) If  $H$  is a non-empty finite subset of a group  $G$ , 6  
 closed under associative product then prove that  $H$  is  
 a subgroup of  $G$ .
- (b) Prove that the intersection of any two subgroups of 6  
 a group is a subgroup.
- (c) Define a congruence relation in group. Prove that a 6  
 congruence relation in group is an equivalence relation.
- OR**
- 3 (a) If  $G$  is a finite group and  $a \in G$  then prove that 6  
 $O(a) | O(G)$ .
- (b) Prove that a group of a prime order is cyclic. 6
- (c) If  $H$  is a subgroup of a group  $G$  of index 2, then 6  
 prove that  $H$  is a normal subgroup of  $G$ .
- 4 (a) Let  $\phi: G \rightarrow \bar{G}$  be a homomorphism of a group  $G$  into 6  
 a group  $\bar{G}$ . Then prove that the kernel of  
 homomorphism  $\phi$ ,  $\ker \phi$  is a normal subgroup of  $G$ .
- (b) Prove that the given mappings are group 6  
 homomorphisms and also find their kernels :

- (1)  $\phi: G \rightarrow G; \phi(x) = x^2, \forall x \in G$ , where  $G$  is the group of all positive real numbers under multiplication,
- (2)  $\phi: G \rightarrow G; \phi(x) = x^3, \forall x \in G$ , where  $G$  is the cyclic group generated by  $a$  of order 12.
- (c) If  $a = (1\ 3\ 5)(1\ 2)$  and  $b = (1\ 5\ 7\ 9)$  then find  $a^{-1}ba$ . 6

OR

- 4 (a) Prove that the set  $I(G)$  of all inner automorphism of a group  $G$  is a subgroup of the group  $A(G)$ , of all automorphism of  $G$ . 6
- (b) Prove that  $G$  is an abelian group if and only if  $\phi: G \rightarrow G$  defined by  $a\phi = a^{-1}$  for all  $a \in G$  is an automorphism. 6
- (c) Find the set  $A(G)$  of all automorphisms of the group  $g = \{e, a, b, a \cdot b\}$  where  $a^2 = b^2 = (a b)^2 = e$  and  $ab = ba$ . 6
- 5 (a) Define an integral domain. prove that every field is an integral domain. 6
- (b) Prove that a commutative ring  $D$  is an integral domain if and only if for  $a, b, c$  in  $D$  with  $a \neq 0$ , the relation  $ab = ac \Rightarrow b = c$ , holds. 6
- (c) If  $U$  and  $V$  are ideals of a ring  $R$ , then prove that  $U+V$  is also an ideal of  $R$ . 6

OR

- 5 (a) Prove that homomorphism  $\phi: R \rightarrow \bar{R}$  is isomorphism 6  
if and only if the kernel of  $\phi$ ,  $I(\phi) = (0)$ .
- (b) Let  $R$  be a commutative ring with unit element 6  
whose only ideals are  $(0)$  and  $R$  itself. Then prove  
that  $R$  is a field.
- (c) In a boolean ring  $R$ , prove that  $a + a = 0$ , 6  
 $\forall a \in R$  Moreover, prove that a Boolean ring is  
commutative.
- 6 (a) Let  $R$  be a Euclidean ring. If  $A = (a_0)$  is a maximal 6  
ideal of  $R$  then prove that  $a_0$  is a prime element  
of  $R$ .
- (b) Let  $R$  be a Euclidean ring. If  $b \neq 0$  is not unit in 6  
 $R$  then prove that  $d(a) < d(ab)$ ,  $a \in R$ .
- (c) Prove that every field is an Euclidean ring. 6

OR

- 6 (a) Let  $R$  be an Euclidean ring. Then prove that every 6  
non-zero element in  $R$  is either unit or can be written  
as the product of a finite number of prime elements of  
 $R$ .
- (b) Define the divisibility relation in commutative ring. 6  
Let  $R$  be an integral domain with unit element. If for  
 $a, b \in R$ ,  $a|b$  and  $b|a$  then prove that  $a$  and  $b$  are  
associates.
- (c) Prove that the relation of  $a$  is an associate of  $b$  is an 6  
equivalence relation in a commutative ring with unit  
element.